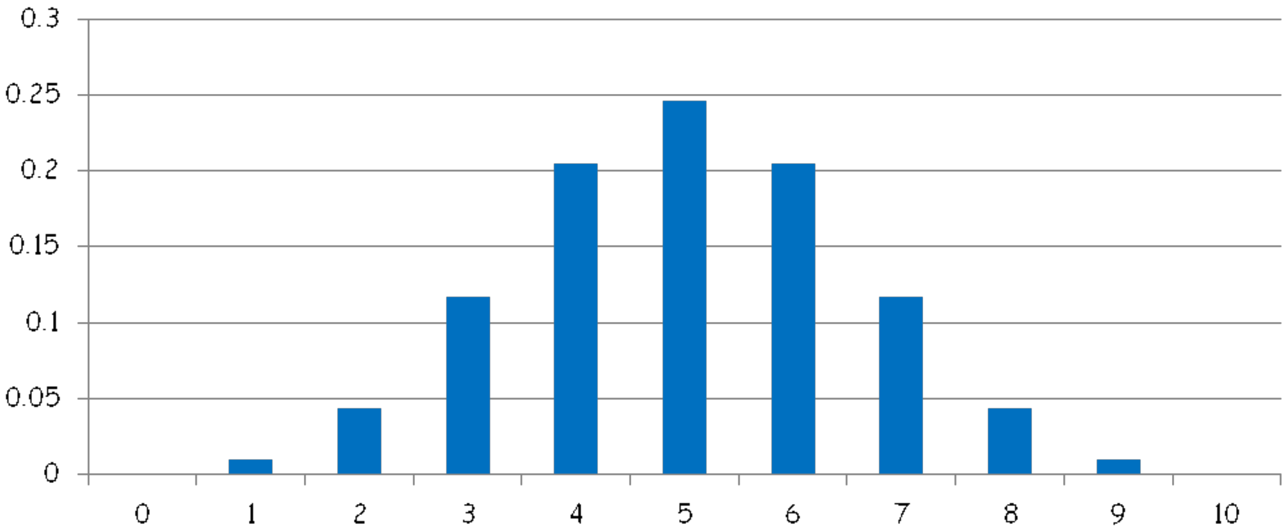
数学を使ってデータから事実を見抜く

数学で習う確率の問題

- 表の確率p=0.5のコインを10回投げた時に表が出る回数の確率は?

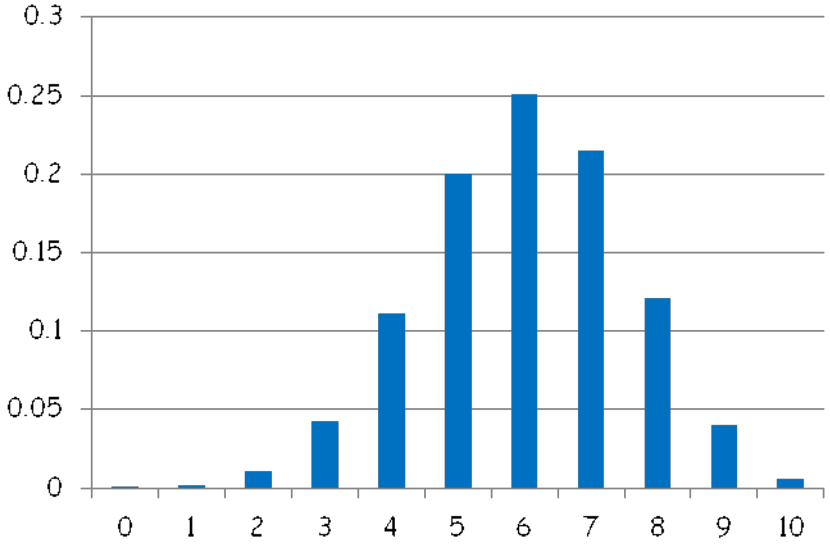
$$p(x)={}_{10}C_x \times 0.5^x \times 0.5^{10-x} = \frac{10\cdot 9 \cdots \{10-(x-1)\}}{x\cdot(x-1)\cdots 2\cdot 1}\times\frac{1}{1024}$$



確率の問題

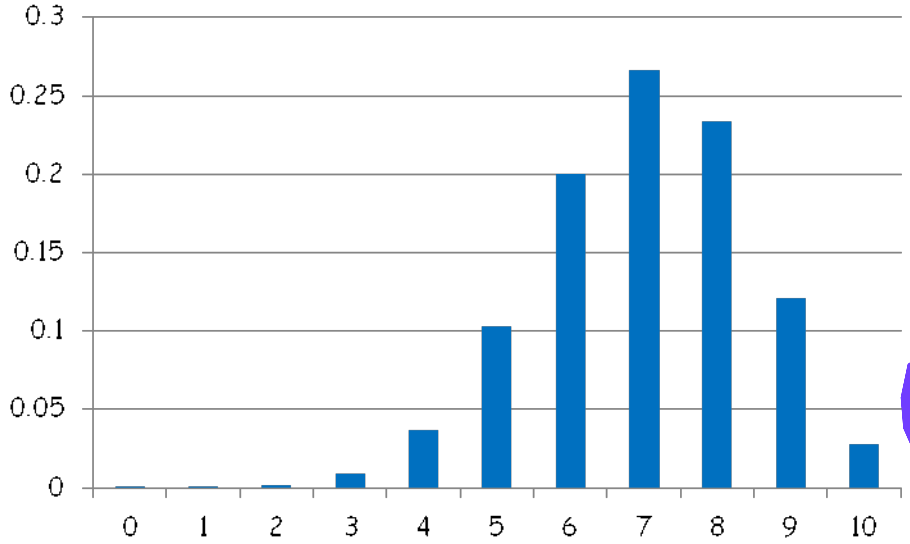
- p=0.6なら

$$p(x) = {}_{10}C_x \times 0.6^x \times 0.4^{10-x}$$



- p=0.7なら

$$p(x) = {}_{10}C_x \times 0.7^x \times 0.3^{10-x}$$



ポイント

- 表が出る確率は問題文に書かれている。
- 問題文に沿って、教科書通りに計算すれば必ず一つの正解にたどり着く。

- 現実の世界は必ず正しく判断できるの?

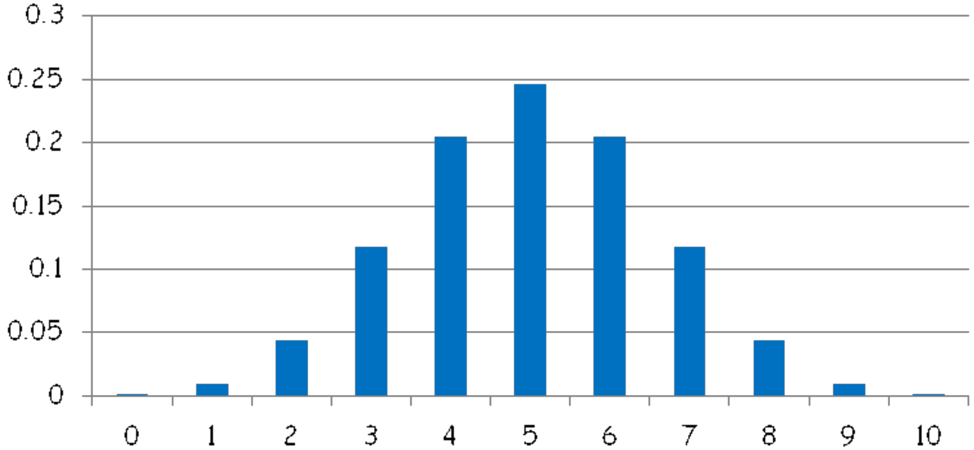
統計の問題

- 表の確率pが分からないコインを10回投げたら6回表が出ました。
- 問1. pの値はいくつでしょう?
- 問2. コインを用意した人は「このコインはp=0.5だ」と言いました。この言葉は嘘だと言えますか?

解答例

- 問1.
  10回中6回なのでp=0.6

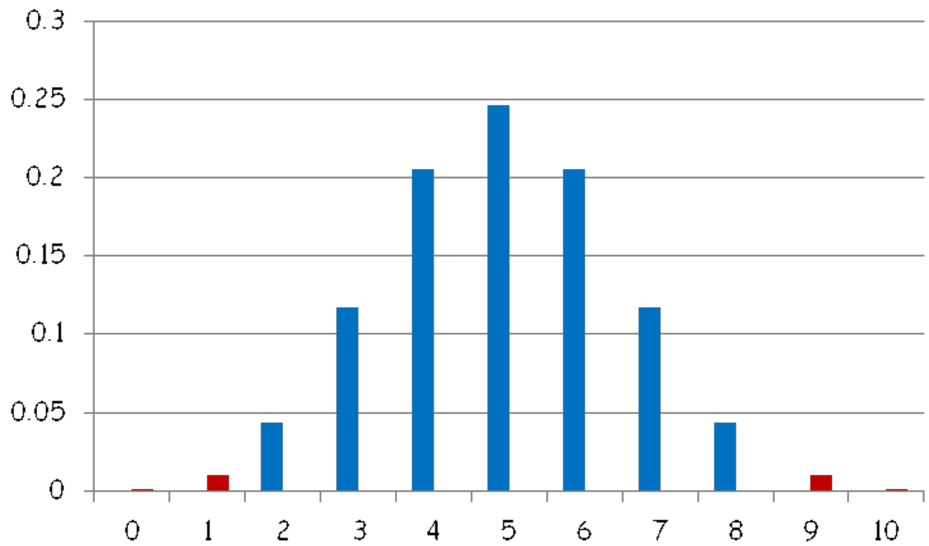
- 絶対? p=0.5のコインでも10回中6回表が出ることはある。



絶対正しい答え

- $0<p<1$なら絶対間違いない
- こんな答えに意味はない
  投げる前と比べて分かったことは$p=0$や$p=1$ではないことだけ。
- 5%なら間違う確率を許そう。

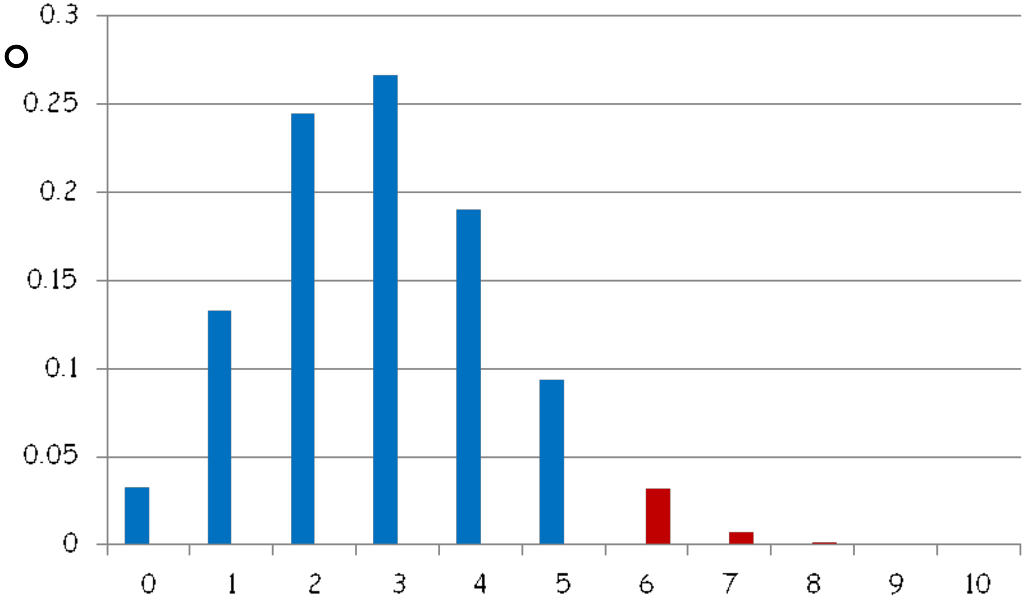
もしp=0.5なら



- 10回中6回表が出る確率は高い

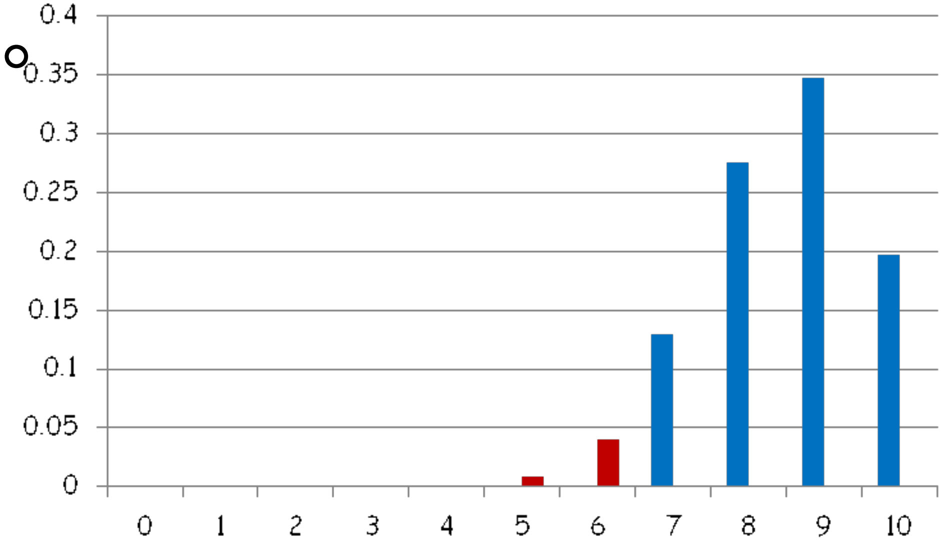
p=0.29なら

- 表の回数が5回以下の確率が95.96%なので「本当はp=0.29なのに、『6回以上表が出たのでp=0.29ではない』と間違える」確率は5%未満。



p=0.85なら

- 表の回数が7回以上の確率が95.003%なので「本当はp=0.85なのに、『6回以下表が出たのでp=0.85ではない』と間違える」確率は5%未満。



解答

- 問1
  5%の間違いを許すなら$0.3<p<0.84$
- 問2
  「このコインは$p=0.5$だ」は嘘とは言えない。
  しかし$p=0.5$だと示したわけでもない。
  「この実験では$p=0.5$を否定する証拠に
  　ならない」だけ。

類題1

- 10回投げて60回表が出た場合、間違う確率を1%許すならpの範囲は?
- p=0.29だと、表の回数が5回以下の確率は95.96%であり、6回以下の確率が99.13%なので、p=0.29かもしれない。
- 問1同様に考えると$0.22<p<0.90$となる。

類題2

- 100回投げて60回表が出た場合、間違う確率を1%許すならpの範囲は?
- 正確さはうんと上昇して$0.47<p<0.72$
- http://fuedakaoru.blogspot.com/2009/12/confidence-interval.html
に計算プログラムを載せています。

計算のポイント

- 測定結果から推測するときには、間違いの確率をゼロには出来ない。
- 間違いの確率を下げようとすると、逆に推定する幅が広くなってしまう。
- 測定数を増やすことにより、間違いの確率を下げ、しかも推定の幅を狭くすることが出来る。