# 結び目を数学で読み解く

河野 俊丈

結び目は日常生活で用いられる身近なものですが, 数学では両端を閉じて空間内の曲線とみなして扱うことにします．結び目が解けるとはどういうことでしょうか．また，結び目が解けないことを数学でどのように証明することができるでしょうか．結び目を境界とする曲面の考察などを通して，結び目についての理解を深めていきます．さらに、最近のジョーンズ多項式の発見などにふれ，これを用いて結び目が鏡像と同値かというカイラリティーについての問題をとりあげます．現在、結び目理論は DNA などの生命科学の問題にも応用されて発展しています．

## 1　結び目とリンク

結び目は空間内の閉じた自己交差をもたない曲線である．リンクは，空間内のいくつかの閉じた交差をもたない曲線であり，結び目の共通部分を持たない和集合として表される．

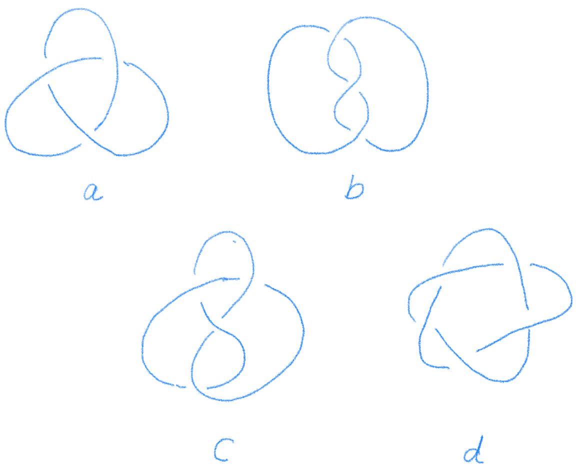


図 1　結び目の例, a: 三葉結び目, b: 三葉結び目の別の表示，c: 8 の字結び目，d: タイプ $(2,5)$ のトーラス結び目

結び目とリンクは，図 1 のように，平面に射影して表示する．このとき，自己交差は横断的に交わる 2 重点のみとなるような射影をとる．図のように交差の上下を表示する．このような射影図をリンクダイアグラムとよぶこともある．3 次元空間内のリンク $L_1$, $L_2$ が同値であるとは，これらが，空間内で自己交差しないような連続的な変形でうつりあうことである．平面に含まれる円周と同値な結び目を自明な結び目とよぶ．

リンク $L_1$, $L_2$ が同値であることは，対応するリンクダイアグラムについて，図 2 に示し

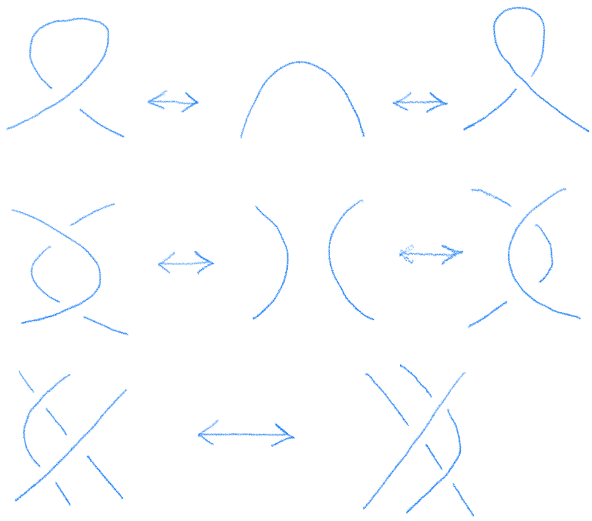

図 2

たライデマイスター移動とよばれる 3 種類の局所的な変形を有限回ほどこすによって互いにうつりあうことと言い替えることができる．平面に含まれる円周と同値な結び目を自明な結び目とよぶ．

## 2　結び目の 3 彩色

結び目の図式に現れる曲線を 3 色で塗り分けることを考える．この時の規則として，

- 3 色をすべて使う．
- 図 3 のような交差点で，$a, b, c$ の色はすべて異なるか，すべて同一とする．

が満たされているとする．このように結び目の図式を 3 色で塗り分けることができる時，結び目は 3 彩色可能であるという．

色の種類を $0, 1, 2$ で表すと，$a, b, c$ の条件は

$$a + a \equiv b + c \mod 3$$

と表される．

結び目が 3 彩色可能であるという性質は，ライデマイスター移動で変わらないことが確かめられる．三葉結び目は 3 彩色可能であるが，自明な結び目は 3 彩色可能ではない．したがって，三葉結び目は自明な結び目と同値ではない，つまり，解くことができないことがわかる．また，8 の字結び目は 3 彩色可能ではないことが示され，三葉結び目と同値ではないことがわかる．

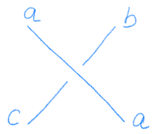


図 3　結び目の図式の 3 彩色

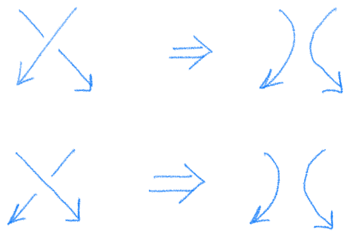

図 4　交差点の平滑化

## 3　ザイフェルト曲面

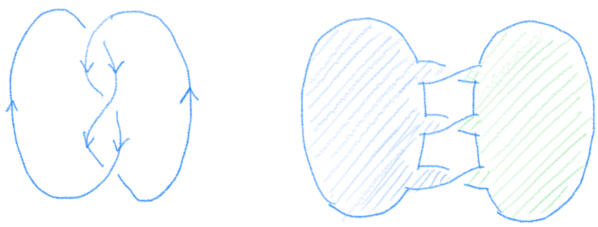

図 5　三葉結び目のザイフェルト曲面

向きのついたリンク $L$ に対して，$L$ を境界とするような 3 次元空間に埋め込まれた向き付け可能な曲面をザイフェルト曲面とよぶ．ザイフェルト曲面は以下のように構成される．リンク $L$ の射影図のそれぞれの交差点において，図 4 のように平滑化とよばれる操作を行う．この操作によって，平面上の互いに交わらない有限個の閉じた曲線が得られる．このようにして構成される曲線をザイフェルトサークルとよぶ．さらに，それぞれのザイフェルトサークルに対して，それを境界とする円板を用意し，交差点とその符号に対応して，バンドを図のように正または負の方向に 180 度ひねって貼り付ける．このようにして，リンク $L$ を境界とする表裏の区別のある曲面を構成することができる．上のザイフェルト曲面の構成方法をザイフェルトのアルゴリズムとよぶ．この方法は，射影図の取り方によるので，リンク $L$ に対して一意的には定まらない．

ザイフェルト曲面を理解するために次のような工作をしてみよう．図のように細長い長

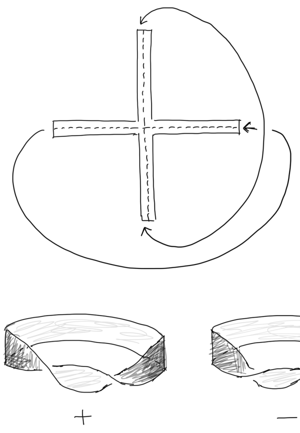


図 6　ねじったバンドを使って結び目を作る

方形の紙を 2 枚用意して，十字形に真ん中で固定する．次の両端を図のように両方とも + のようにねじって貼り合わせ，中心線に沿って切り開く．出来上がった図形はどのような結び目になるだろうか．また片方を +，もう一方を − とした場合はどうか．

参考文献：

[1] 河野俊丈，組みひもの数理：新装版，日本評論社，2022 年
[2] 村杉邦男，結び目理論とその応用，日本評論社，1993 年