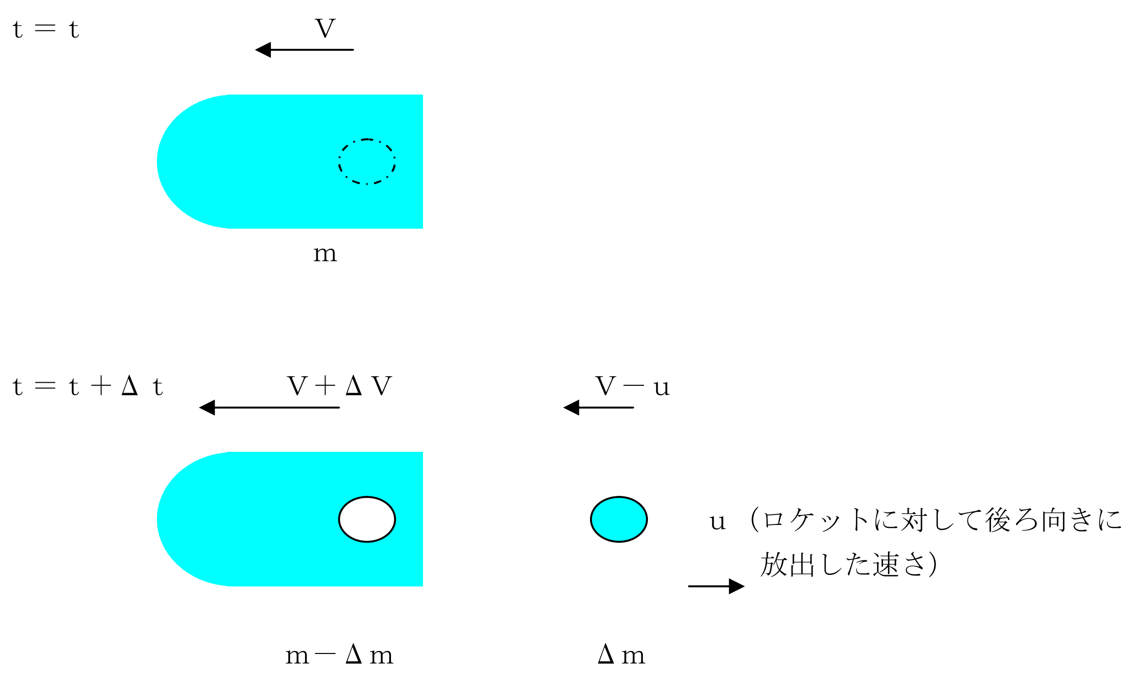
模擬講義：ロケット方程式の導出と意味について

九州大学大学院工学研究院航空宇宙工学部門
麻　生　　茂
(aso@aero.kyushu-u.ac.jp)

【はじめに】この教材は中学生や高校生が九大を訪問したときに、模擬講義として行った内容です。中高生への呼びかけの言葉もありますので、指導者の先生方はご承知おき下さい。なお、ここで紹介するロケット方程式を導いたロシアの科学者はコンスタンチン・エドゥアルドヴィチ・ツィオルコフスキー 博士（Константин Эдуардович Циолковский, 英語読みでは Konstantin Eduradovich Tsiolkovskiy:1857-1936）です。この方程式の導出により、彼は、人類が人工衛星を飛ばせることを予言しました。この方程式がなかったら人類は人工衛星、ひいては人類の宇宙開発利用ができなかったくらい重要な方程式です。

時刻ｔ＝ｔにおいて速さＶで飛行しているロケット（質量m）が、時刻ｔ＝ｔ＋Δｔにおいて推進剤をΔｍだけロケットに対して後ろ向きに速さｕで放出することにより、ロケットの速さがＶ＋ΔＶになったとする。ここで、ロケットには重力、空気抵抗は働かないと仮定する。



今、質量mのロケットが速度Vで飛行しているとする。このとき、一部の質量Δmを速度uで後方放出したとする。この間運動量は保存されるから

$$mV = (m-\Delta m)(V+\Delta V) + \Delta m(V-u)$$
$$= mV + m\Delta V - V\Delta m - \Delta m \cdot \Delta V + \Delta m \cdot V - \Delta m \cdot u$$

$\Delta m \cdot \Delta V$ を２次の微少量として無視すると

$$m\Delta V = u \cdot \Delta m \tag{1}$$

これを微分形で書くと

$$\Delta V = \frac{dV}{dt}\Delta t \quad , \quad \Delta m = -\frac{dm}{dt}\Delta t$$ （$\frac{dm}{dt}$ <0 より　Δm は正）より

$$m\frac{dV}{dt}\Delta t = u \cdot \left(-\frac{dm}{dt}\right)\Delta t$$

$$\therefore \quad m\frac{dV}{dt} = -u\frac{dm}{dt} \tag{2}$$

さらに、次式を得る。

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{u}{m}\frac{dm}{dt}$$

ロケットが $t=0$ から $t=t_f$ まで燃焼したとすると

$$\int_0^{t_f}\frac{dV}{dt}dt = -\int_0^{t_f}\frac{u}{m}\frac{dm}{dt}dt$$

$$\therefore \quad \int_0^{t_f} dV = -\int_0^{t_f}\frac{u}{m}\,dm$$

（ロケットの燃焼による速度増分）　ΔV

$$\Delta V = V\,(t_f) - V(0) = -\int_0^{m(t_f)}\frac{u}{m}\,dm \tag{3}$$

$u = const.$　とすると

$$\Delta V = -u\int_0^{m(t_f)}\frac{dm}{m} = -u\,\left[\ln m\right]_0^{m(t_f)}$$

$$\Delta V = -u\left(\ln m(t_f) - \ln m(0)\right) = u\left(\ln m(0) - \ln m(t_f)\right)$$

$$\Delta V = u\,\ln\frac{m(0)}{m(t_f)} = u\,\ln\frac{m_{initial}}{m_{final}} \tag{4}$$

この式をロケット方程式という。(ロシアの科学者ツィオルコフスキーが導いたのでツィオルコフスキー方程式ともいう）この式の意味は、ロケットが燃焼を始めてから燃焼が終わるまでに得たロケットの速さの変化（増速という）ΔＶは、ロケットから出ていく質量（燃焼ガス）の速さｕとロケットが燃焼を始める前の質量$m_{initial}$とロケットが燃焼を終了したときの質量m_{final}で求められることを示している。

質量比　$\mu = \dfrac{m(t_f)}{m(o)}$　と定義すると以下のように表される。

$$\Delta V = u \ln \frac{1}{\mu} \tag{5}$$

　ここで u は、ロケットから出ていく質量（燃焼ガス）のロケットに対する相対速度であるので、ノズル出口での外気圧との圧力差から機体に働く推進力も含んだ有効排気速度 c で表すほうが一般的である。

$$\Delta V = c \ln \frac{1}{\mu} \tag{6}$$

有効排気速度 c はロケットの性能を表す比推力 Isp と重力加速度 g を用いて c ＝ g Isp と表されるので、次式を得る。

$$\Delta V = gI_{sp} \ln \frac{1}{\mu} = g\, I_{sp}\, \ln \frac{m_0}{m_f} \tag{7}$$

つまり、ΔV は I_{sp} と質量比 $\mu = \dfrac{m(t_f)}{m(o)}$ に関係することがわかる。

　それでは 1 段式のロケットが打ち上げてから得られる速さを求めてみよう。
ケロシンを燃料とし、液体酸素を酸化剤とするロケットでは約 Isp=350 秒であり、通常のロケットでは質量比 μ は 0.2 程度である。

（ここからは自分で計算してみよう）

まず、ロケットの有効排気速度 c は、
　c ＝ g ×Isp=9.8 m/s² ×　350 sec ＝3430 m/s
ロケットが静止状態から発射した時にロケットが最終的に得る速さΔＶは
　ΔＶ＝3430 m/s × ln (1 / 0.2) = 3430 m/s × 1.609 = 5520 m/s

（できたかな）

人工衛星が地球に落下しないで地球を回ることができる第 1 宇宙速度は 7.9 km/s=7900 m/s なので、このロケットは人工衛星を打ち上げることができない。故に、ツオルコフスキーは 1 段では人工衛星は打ち上げられないと判断した。でも、ツオルコフスキーはがっかりせずに、どうしたら第 1 宇宙速度まで加速できるかを考えた。

（自分でも考えてみよう）

？？？？？？？

（わかったかな）

その答えは、多段式ロケットでした。２段式のロケットを作って、１段目のロケットも２段目のロケットも同じようにケロシンを燃料とし、液体酸素を酸化剤とするロケットでは約 Isp=350 秒であり、通常のロケットでは質量比 μ は 0.2 程度がせいぜいです。この場合、それぞれ一段ごとにロケットの速さは 5520　m/s だけ速くなっていくから２段目では 5520　m/s　＋5520　m/s　＝11040　m/s＝11.04　km/s となり、第一宇宙速度よりも速くなる。実際には重力の影響、空気の抵抗などでロケットは減速されるのでこれくらい増速できるロケットがあってもやっと宇宙に行けたということになるだろう。ケロシンを燃料とし、液体酸素を酸化剤とするソユーズというロシアのロケットはこのようにして人工衛星などを打ち上げている。日本の H-IIA、H-IIB ロケットは液体水素、液体酸素を使っているので Isp=450 秒と高いので同じ質量比を大きく取れ、その分ペイロード（宇宙に持っていく質量（人も含めて））を大きくすることができる。
ここで

第１宇宙速度　　$V_1 = \sqrt{\dfrac{\mu}{a}} = 7.9\ km/s$

第２宇宙速度　　$V_2 = \sqrt{\dfrac{2\mu}{a}} = 11.2\ km/s$

ここで、$\mu = 3.986 \times 10^5\ km^3/s^2$,　a(地球半径) $= 6378\ km$

以上